Chapitre 25 : Déterminants

1 Groupe symétrique

1.1 Généralités

Définition 1.1. On appelle groupe symétrique sur $n \geq 1$ "lettres" le groupe $\gamma(n)$ des bijections $[\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$

Définition 1.2. Soit $\sigma \in \gamma(n)$
* Un élément $i \in [\![1,n]\!]$ est un point fixe de σ si $\sigma(i) = i$
* Le support de σ est $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{i \in [\![1,n]\!] \mid \sigma(i) \neq i\}$

Définition 1.3.
* Une transposition est une permutation $\tau \in \gamma(n)$ dont le support est une paire $\{i,j\}$ (et qui échange i et j). On la note $\tau = (i\,j)$
  On a $(i\,j) = (j\,i)$
* Plus généralement, si $i_1, \dots, i_r \in [\![1,n]\!]$ sont tous différents, on note $(i_1\,i_2\,i_3 \dots i_r)$ la permutation σ telle que

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1, r-1]\!],\ \sigma(i_k) = i_{k+1} \\ \sigma(i_r) = i_1, \text{ et } \forall j \notin \{i_1, \dots, i_r\},\ \sigma(j) \neq j \end{cases}$$

  Une telle permutation est appelée un r-cycle.

Théorème 1.4. Le groupe $\gamma(n)$ est engendré par les transpositions.

1.2 Décomposition en cycles disjoints

Théorème 1.5. Soit $\sigma \in \gamma(n)$
Il existe un entier $r \geq 0$ et des cycles $\gamma_1, \dots \gamma_r$ à supports disjoints tels que $\sigma = \gamma_r \circ \dots \circ \gamma_1$
En outre, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

1.3 Signature d'une permutation

Théorème 1.6. Il existe un unique morphisme de groupes $\varepsilon : (\gamma(n), \circ) \to (\{\pm 1\}, \times)$ tel que, pour toute transposition $\tau \in \gamma(n)$, $\varepsilon(\tau) = -1$
(ce morphisme s'appelle la signature)

Lemme 1.7.

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2([\![1,n]\!])} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Proposition 1.8. Soit $r \in [\![2,n]\!]$ et $\sigma \in \gamma(n)$ un r-cycle.
Alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{r+1}$

Définition 1.9. On appelle groupe alterné $a(n)$ le noyau de la signature $a(n) = \{\sigma \in \gamma(n) \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$

2 Déterminant

Soit K un corps.

2.1 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 2.1. Soit $A \in M_n(K)$
On définit son déterminant :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \gamma(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} [A]_{\sigma(j)\,j}$$

On note aussi

$$\det A = \begin{vmatrix} [A]_{1,1} & \cdots & [A]_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ [A]_{n,1} & \cdots & [A]_{n,n} \end{vmatrix}$$

Proposition 2.2. On a $\forall A \in M_n(K)$, $\det(A) = \det(A^T)$

2.2 Formes n-linéaires alternés

Définition 2.3. Une forme n-linéaire sur un espace vectoriel E est une application $f : E^n \to K$ linéaire en chacune de ses variables, càd telle que pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et $i \in [\![1, n]\!]$ l'application

$$\begin{cases} E \to K \\ y \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

soit linéaire.

Définition 2.4. Une forme n-linéaire $f : E^n \to K$ est dite alternée si $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux (au moins) des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont égaux.

Proposition 2.5. Une forme n-linéaire alternée est antisymétrique :
Si $(y_1, \dots, y_n)$ est obtenu à partir de $(x_1, \dots, x_n)$ et échangeant x_i et x_j pour $i \neq j$, alors $f(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n)$

Changement de point de vue : On peut considérer le déterminant comme un application

$$\begin{cases} K^n \times \dots \times K^n \to K \quad \text{(n fois)} \\ (c_1, \dots, c_n) \mapsto \det(c_1, \dots, c_n) = \det(c_1 \mid \dots \mid c_n) \end{cases}$$

Théorème 2.6. Le déterminant est une forme n-linéaire alternée sur K^n

Corollaire 2.7. Si $A \in M_n(K)$ n'est pas inversible, alors $\det(A) = 0$

Théorème 2.8. Toute forme n-linéaire alternée sur K^n est proportionnelle au déterminant.

Corollaire 2.9.

- Toute application $f : M_n(K) \to K$ "n-linéaire alternée par rapport aux colonnes"
  s'écrit $\lambda \det$, où $\lambda = f(I_n)$
- La même chose est vraie pour les application "n-linéaires alternées par rapport aux lignes".

Définition 2.10. Étant donné un ev E de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E, on associe à toute famille $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de E le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$

Corollaire 2.11. Soit E un ev de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E

* Le déterminant
$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{cases} E^n \to K \\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$
est une forme n-linéaire alternée sur E
* Toute forme n-linéaire alternée sur E est de la forme $\lambda \det_{\mathcal{B}}$ pour un certain $\lambda \in K$

2.3 Multiplicativité du déterminant

Théorème 2.12. On a $\forall A, B \in M_n(K)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Corollaire 2.13.

* On a $\forall A \in M_n(K)$, $\det(A) \neq 0 \implies A \in GL_n(K)$
* Le déterminant induit un morphisme de groupes multiplicatifs
$\det : GL_n(K) \to K^*$

Définition 2.14. On appelle groupe spécial linéaire le noyau

$$SL_n(K) = \ker(\det : GL_n(K) \to K^*) = \{A \in M_n(K) \mid \det(A) = 1\}$$

Corollaire 2.15. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E
Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E
Alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \iff (v_1, \dots, v_n)$ base de E

2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 2.16. Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Définition 2.17. Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$
On définit le déterminant de f, noté $\det f$, comme le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, pour une base $\mathcal{B}$ de E

Proposition 2.18. Avec les mêmes notations, $\det f \neq 0$ si et seulement si f est un automorphisme.

Proposition 2.19. Soit E un espace vectoriel de dim n muni d'une base $\mathcal{B}$, $v_1, \dots, v_n \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$
Alors $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$

3 Calculs

3.1 Opérations élémentaires

Proposition 3.1. Soit $A \in M_n(K)$
La matrice A' obtenue à partir de A en effectuant :

* Un échange $[L_i \leftrightarrow L_j]$ ou $[C_i \leftrightarrow C_j]$ vérifie $\det A' = -\det A$
* Une dilatation $[L_i \leftarrow \lambda L_i]$ ou $[C_i \leftarrow \lambda C_i]$ vérifie $\det A' = \lambda \det A$
* Une transvection $[L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j]$ ou $[C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j]$ vérifie $\det A' = \det A$

3.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition 3.2. Soit $A \in M_n(K)$ et $(i,j) \in [\![,n]\!]^2$
On définit :

- Le mineur (i,j) : $\Delta_{i,j}$ qui est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A
- Le cofacteur (i,j) est $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$

Théorème 3.3. Soit $A \in M_n(K)$
On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}[A]_{i,j}$$

(développement par rapport à la i-ème ligne)
Et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}[A]_{i,j}$$

(développement par rapport à la j-ème colonne)

Théorème 3.4. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Corollaire 3.5. Une matrice triangulaire est inversible ssi aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul.

Théorème 3.6. On considère une matrice "triangulaire par blocs"

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in M_{n+p}(K) \text{ où } \begin{cases} A \in M_n(K) \\ C \in M_p(K) \\ B \in M_{np}(K) \end{cases}$$

Alors $\det M = \det A \cdot \det C$

3.3 Déterminant de Vandermonde

Théorème 3.7. Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$
Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i)$$

Ce déterminant est le déterminant de Vandermonde $V(a_0, \dots, a_{n-1})$

3.4 Comatrice

Définition 3.8. Soit $A \in M_n(K)$
La comatrice de A est la matrice

$$\mathrm{com}(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

des cofacteurs de A

Théorème 3.9. Soit $A \in M_n(K)$
On a $A\,\mathrm{com}(A)^T = \mathrm{com}(A)^T A = \det(A) I_n$

Corollaire 3.10. Si $A \in M_n(K)$, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{com}(A)^T$